Wstęp do STW.
Transformacja Lorentza

Wyobraźmy sobie dwie oddziałujące ze sobą cząstki. Z jedną z nich, powiedzmy masywną i nieruchomą, wiążemy jeden układ odniesienia – wzorcowy (O). Początkowe położenie drugiej cząstki, znajdującej się w polu oddziaływania tej pierwszej, i jej prędkość w chwili początkowej, przypisujemy drugiemu układowi odniesienia – primowanemu (O'), tak, że w chwili zero położenie ruchomej cząstki w układzie O' wynosi zero, tak samo jak jej chwilowa prędkość. Następnie pod wpływem oddziaływania od cząstki pierwszej, rozpoczyna się obserwowany w obu układach odniesienia ruch cząstki numer dwa.

Umiemy bez trudu napisać dynamiczne równanie ruchu tej cząstki w układzie wzorcowym:

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_2 = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t) \quad .$$

Jednakże, oddziaływanie pomiędzy cząstkami przenosi się ze skończoną prędkością – jedynie tak szybko, jak szybko podróżują w przestrzeni nośniki tego oddziaływania (zaburzenie pola). A zatem, modyfikacja siły oddziaływania, wynikająca z przesunięcia się pod wpływem siły cząstki drugiej do innego położenia $\vec{r}_2$, podróżująca od źródła oddziaływania – cząstki pierwszej – dotrze do niej po pewnym skończonym, niezerowym czasie – bynajmniej nie momentalnie!

Jeśli zatem układ O' porusza się z prędkościami porównywalnymi z prędkością rozchodzenia się samego oddziaływania (porównywalnymi z prędkością światła, tzn. *relatywistycznymi*), to dynamiczne równanie ruchu w tym układzie, a także w konsekwencji, kinematyczne, może przyjąć bardzo dalece nieoczywistą i niesymetryczną postać do tej, którą ma ono w układzie nieruchomym.

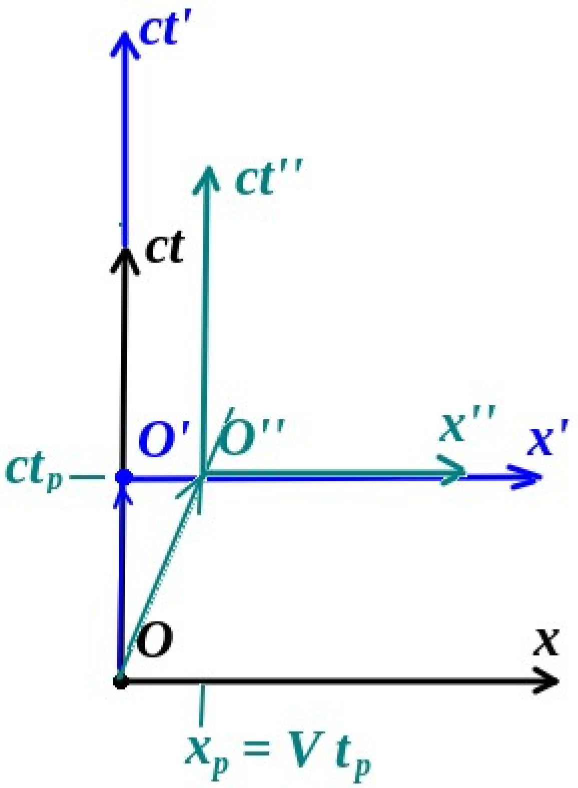
Albert Einstein przyjął podejście, że prawa fizyki, które miałyby różne postaci, tj. różne sformułowanie w różnych układach odniesienia, a zatem które łamałyby symetrię równań, są mniej lub bardziej bezużyteczne. Prawa fizyki muszą mieć bezwzględnie analogiczną postać, niezależną od przyjętego układu, tak aby prowadziły nas do tych samych wniosków co do skutków dokonanego eksperymentu fizycznego (jednakowo oszacowywały te skutki, niezależnie od przyjętego układu).

Komplikację, która się pojawia, trzeba zatem przekierować gdzieś indziej, uwalniając od niej postaci praw fizyki. Przyjmując postulat, że równanie $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ ma mieć taką samą postać w obu układach odniesienia (a jedynie różnić się treścią pojęcia czasu *t* i wektorów po lewej i prawej stronie równości), Einstein uznał, że w takim razie trzeba zmodyfikować – siłą rzeczy uczynić bardziej skomplikowanym – charakter pola fizycznego, a więc dynamikę i skutki siły oddziaływania. Oryginalnie, Einstein sformułował swoją teorię w oparciu o analizę siły elektromotorycznej, pojawiającej się w przewodniku poruszającym się względem magnesu. Zależnie od tego, z którym z elementów (magnes, przewodnik) zwiążemy nasz układ odniesienia, a zatem, który z nich uznamy za nieruchomy, wnioskujemy zupełnie różną przyczynę pojawiania się prądu w przewodniku: w układzie związanym z magnesem jest to wyłącznie pole magnetyczne magnesu, którego strumień przecinają ładunki; w układzie przewodnika, jest to wyłącznie pole elektrostatyczne ładunków elektrycznych (początkowo nieruchomych), którego strumień przecina magnes. W układzie nie związanym z żadnym z ciał, przyczyna zostanie zidentyfikowana jako mieszanka obu powyższych pól, czyli ruch względny magnesu i przewodnika jednocześnie. Jednak w efekcie, musi powstać dokładnie taka sama co do wielkości, zmierzona niezależnie w każdym układzie różnica potencjałów elektrycznych. A zatem teoria względności mówi nam **o *bezwzględności* efektów fizycznych, w konsekwencji *względności* opisu przyczyn ich powstania**. Wielkości – np. takie jak czas – muszą być różnie opisywane w różnych układach odniesienia, aby powodować te same co do skutków efekty fizyczne.

O oddziaływaniu cząstek relatywistycznych należy mówić innym językiem, niż językiem galileuszowskiej mechaniki (w której czas jest jeden i niezależny od wyboru układu) i euklidesowej geometrii (w której długość odcinka, mierzona w dowolnym układzie odniesienia jest jednakowa). A oto udana próba adekwatnej do potrzeb „komplikacji języka”: *Szczególna Teoria Względności*.

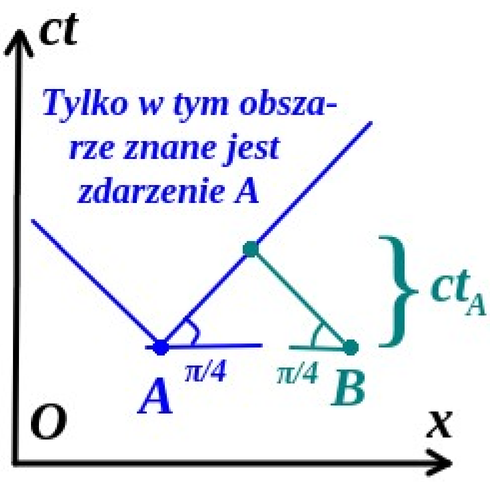
Zaczniemy od jedynie słusznego zabiegu pomnożenia czasu płynącego w obu układach przez prędkość światła *c*, co sprawia, że wielkość *ct* („sekundy świetlne”) wraz z upływem czasu *t* mierzy nam długość w metrach, tak samo jak każdy wymiar geometryczny *x*, *y*, *z* – a konkretnie wyraża ona odległość, jaką w czasie *t* zdołało pokonać światło (czyli jak daleko dotarła informacja o zmianie pola oddziaływania lub jakakolwiek inna próba komunikacji jednego układu odniesienia z drugim).

Naturalną kanwą do opisu i ilustrowania zdarzeń relatywistycznych jest *czasoprzestrzeń Minkowskiego.* Zakładając, że wszelki ruch odbywa się w kierunku *x* (a zatem *y* i *z* są jednakowe w każdym układzie), tzn. układ O’ oddala się od wzorcowego układu O z prędkością *V* w kierunku x, do opisu wystarczy płaszczyzna *x-ct* z wymiarem położeń *x* jako osią odciętych, a osią czasu *ct* jako osią rzędnych. Zażądajmy dla prostoty, żeby oba układy rozpoczynały swój względny ruch w tym samym punkcie i następnie rozchodziły się, czyli, żeby w chwili $t = 0$ punkty O i O’ pokrywały się. W tej sytuacji, nawet, jeśli układ O’ jest nieruchomy (kolor granatowy na obrazku), to na płaszczyźnie Minkowskiego będzie się on poruszał pionowo w górę (zgodnie z kierunkiem upływu czasu) wraz ze wszystkimi wydarzeniami oglądanymi z układu O, tym samym rozchodząc się z O.

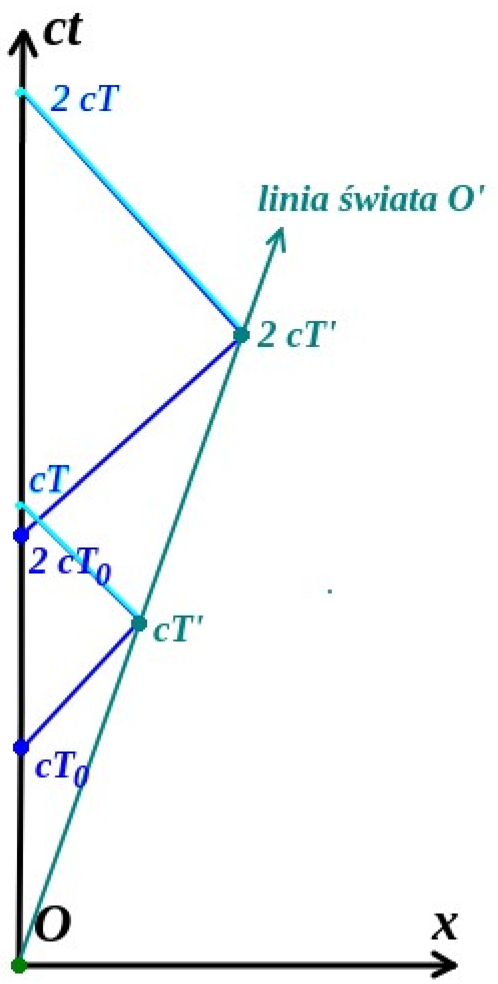


Układ O’’ (kolor seledynowy) reprezentuje układ poruszający się ze stałą prędkością V w kierunku x. Przesuwa się on nie tylko wraz z upływem czasu w górę, ale również w kierunku V. Proszę zauważyć, że są to wszystko układy inercjalne (bez przyspieszeń i bez sił pozornych).

Jako że (zgodnie z założeniem) żadna informacja nie będzie poruszać się z prędkością większą, niż c, wówczas największy dystans, jaki w czasie t_p może pokonać układ O’’, wynosi $c\ t_p$. Będzie to odpowiadało torowi (odcinkowi, rysowanemu przez punkt O’’) – tzw. *linii świata* O’’ dokładnie pod kątem π/4 (czyli 45°) do pionu. Każdy odcinek, łączący ze sobą dwa fizycznie zdolne do komunikowania się ze sobą punkty, musi mieć kąt, licząc od osi *ct* (od pionu), nie przekraczający π/4. Poza tym obszarem leży dla tych punktów „absolutne gdzie indziej”. Aby w punkcie B (na kolejnym obrazku) dowiedziano się o fakcie, który wydarzył się w punkcie A (a dokładniej, żeby sonda, wysłana z B w kierunku A otrzymała pierwszą informację na temat zdarzenia A, zanim rozpocznie swój powrót do B), musiał minąć czas t_A.



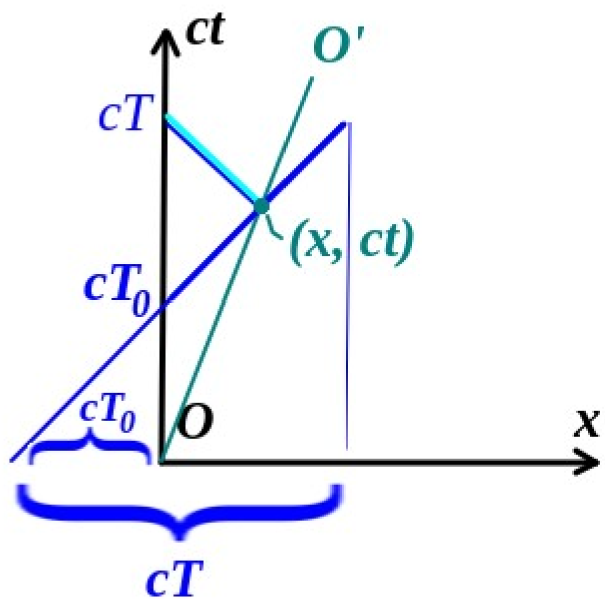
Obszar, w którym znane jest dane wydarzenie A (dzięki rozchodzeniu się w każdym kierunku z prędkością światła informacji o nim) w przestrzeni Minkowskiego tworzy odwrócony stożek z wierzchołkiem w punkcie A i o kącie rozwarcia π/2 (= 90°). Nazywa się on *stożkiem światła.*



Aby zsynchronizować ze sobą zegary w obu układach odniesienia, z punktu O w kierunku O' (poruszającym się z dodatnią – dla ustalenia uwagi – prędkością V względem niego) będziemy wysyłać regularne sygnały, powiedzmy, co T_0, a zatem w momencie 0, T_0, $2T_0$, itd. Gdy tylko personel O' odbierze nasz sygnał, momentalnie wysyła go z powrotem do nas (por. obrazek). W jego układzie, będzie otrzymywać on informację od nas co T', a zatem w chwilach czasu 0, T', $2T'$, itd. Oba układy są inercjalne, a więc nie może być mowy o zmianach w regularności otrzymywania sygnałów: zarówno w O' pochodzących z O, jak i z powrotem, z O' do O – co następować będzie w naszym układzie co T, a więc w chwilach 0, T, $2T$, itd.

Tymczasem, wiedza nasza ogranicza się do znajomości względnej prędkości V oraz tego, że układ O' ucieka od O w prawo, względnie O od O' w lewo. Będziemy wiedzieć, kiedy wysłaliśmy z O kolejny sygnał (wielokrotność T_0) i kiedy odebraliśmy w O odbity sygnał (wielokrotność T).

Jaki takt zegara O zostanie odebrany w O'? Wyraża go stosunek $\alpha := \frac{T'}{T_0}$. Kolejne interwały T_0 będą rozciągnięte α-krotnie przy odbiorze w interwałach T'. Z izotropowości przestrzeni i symetrii zagadnienia wynika, że tak samo sygnał odbity przez O' i wracający do O będzie rozciągnięty α-krotnie: $\alpha \equiv \frac{T'}{T_0} = \frac{T}{T'}$, skąd wynika, że $T = \alpha^2 T_0$. Skoro geometria jest taka, jak na rysunku po prawej, to współrzędne punktu czasoprzestrzeni (x, ct), w którym nastąpił odbiór sygnału przez O' (jak wnioskuje to ze swoich danych ekipa z układu O) wynoszą, odpowiednio,



$$\begin{cases} x = c\dfrac{T - T_0}{2} \;; \\ ct = c\dfrac{T + T_0}{2} \;. \end{cases}$$

Obserwator O wie, że O' porusza się z prędkością

$$V = \frac{x}{t} = c\frac{T - T_0}{T + T_0} = c\frac{\alpha^2 T_0 - T_0}{\alpha^2 T_0 + T_0} = c\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \;.$$

V/c, czyli *V* mierzona w jednostkach prędkości światła, nosi nazwę β i wynosi, jak widać, $\beta = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}$. Przeciwnie, zmiana taktu α zegarów pomiędzy układami wynosi $\alpha = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(1+\beta)$, gdzie wprowadziliśmy dodatkowo standardowe oznaczenie $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Zauważmy, że kiedy prędkość *V* jest niewielka wobec *c*, $\beta \to 0$, zaś $\alpha, \gamma \to 1$.

Tak więc,

$$T' = \alpha T_0 = T_0\, \gamma(1+\beta),$$
$$T = \alpha T' = T'\, \gamma(1+\beta) = T_0 \underbrace{[\gamma(1+\beta)]^2}_{=\frac{1+\beta}{1-\beta}} \;.$$

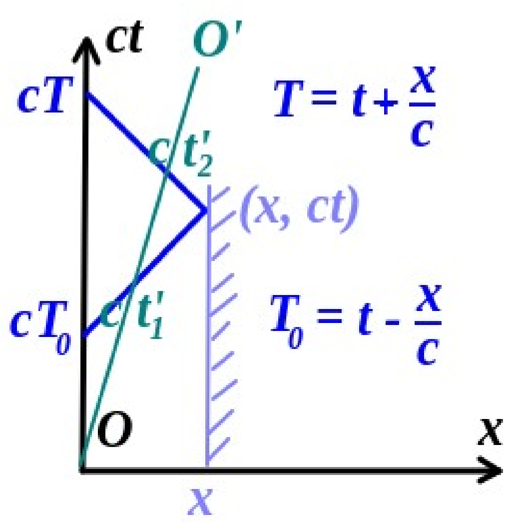
Teraz, mając już wspólny względny przelicznik, personel układu O' może zsynchronizować swój zegar, aby pokazał np. w chwili *T* ten sam czas, co zegar w układzie O (lub na odwrót). Niestety, nie damy rady nic zrobić z faktem, że zegary te i tak chodzić będą w różnym tempie, wyrażanym przez α. Realna sekunda czasu w układzie O' nie będzie nigdy równa realnej sekundzie w układzie O. Identyczne zjawiska fizyczne będą nieubłaganie zachodziły w nich z różną szybkością (tym wolniej, im układ szybciej się porusza).

Oczywiście, moglibyśmy sztucznie podkręcić wszystkie zegary w O' (sfałszować definicję sekundy), żeby chodziły dokładnie w tym samym tempie, co w O, i wówczas one wszystkie, w dowolnym momencie czasu (i w jednym, i w drugim układzie) pokazywałyby literalnie ten sam czas. Ma to jednak jeden gigantyczny mankament – wprowadza dokładnie tę zasadniczą wadę, której konieczność usunięcia leży u założeń teorii Einsteina. Jeśli mamy np. dwa identyczne egzemplarze świeczki, która w O pali się równo godzinę, to zabierając jej dokładną kopię na pokład O’ i mierząc tamtejszymi (podkręconymi!) zegarami, zobaczymy, że będzie się ona paliła *dłużej*, np. 1h 20m. Raporty spisane z eksperymentu palenia się świeczki w obu układach (*„Ta świeca pali się dokładnie … minut”*) będą niejednakowe – a przecież dotyczą stałej, materiałowej cechy tej świecy, tempa jej spalania. Nie może być tak, żeby świeca, która mogła w pędzącym pociągu palić się 1h 20m, po jej wyrzuceniu przez okno pociągu i zapaleniu na peronie, mogła palić się już tylko 1h, bo niby z jakiej racji? Zaobserwowaliśmy różny przebieg tego samego zjawiska, a zatem jest ono niepowtarzalne. Nie obowiązuje wobec tego zasada zachowania energii, etc. Fizyki nie da się w takich warunkach uprawiać, jeśli dwa raporty w dwóch różnych układach odniesienia, dotyczące dokładnie tego samego i tak samo przeprowadzanego doświadczenia, zawierają dwa różne wyniki.

Jest jeszcze gorzej, gdy pojawi się trzeci układ odniesienia O”, poruszający się z jeszcze inną prędkością. Pytanie: według którego z układów, O czy O’, chcemy, żeby przetaktował swój zegar, tak aby dzielić z nim „ten sam” czas? Bo względem każdego z nich ma on inny współczynnik $\alpha = \gamma\ (1 + \beta)$, który **nie** jest liniowy wobec prędkości względnej pomiędzy układami. Przetaktowanie zegarów pomiędzy O a O’, a następnie O’ a O”, daje inny wynik, niż bezpośrednio pomiędzy O a O”, o czym łatwo się przekonać.

Np. jeśli $V = 0$, $V' = 0.1\ c$, a $V'' = 0.2\ c$, to α (T→ T’) = 1.111 = α (T’→ T”); $1.111^2 = 1.235\ldots$ Tymczasem, α (T→ T”) = 1.250. Jeśli zatem zegary w O” skoordynujemy np. z O, będą one chodzić w innym tempie (1/1.25), niż widziane zeń zegary w O’ (skoordynowane z *dokładnie tym samym* układem O). Relacja „zegary pokazują ten sam czas” jest ewidentnie nieprzechodnia!

Wracając do fundamentalnej myśli Einsteina, że wnioski z obserwacji tego samego zjawiska w różnych układach odniesienia muszą dawać jednakowy rezultat, zlećmy załodze pokładowej układu O’, aby zbadała to samo zjawisko, które jest badane przez ekipę z O. Personel O chce odbić promień światła od lustra, które znajduje się w odległości *x* od środka O ich układu. Trasa promienia świetlnego na płaszczyźnie Minkowskiego będzie złamanym odcinkiem, odbitym od lustra w punkcie o poziomej odległości *x* i podróżującym pod kątem π/4 do pionu. Tymczasem, uczeni znajdujący się w środku O’ ich układu, zamierzają podejrzeć, kiedy promień świetlny z O przeleci dwukrotnie tuż koło nich (tj. przetnie ich linię świata; por. obrazek poniżej) i wywnioskować z tego, gdzie znajduje się lustro.



Uczeni w O’ orzekają, że lustro, które odbiło promień świetlny, znajduje się w punkcie *(x’, ct’)*, takim, że

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t_2' + t_1'}{2} \ ; \\ x' = c\,\dfrac{t_2' - t_1'}{2} \ . \end{cases}$$

Rozwiązując ten prosty układ równań względem t_1' i t_2', otrzymujemy

$$\begin{cases} t_1' = t' - \dfrac{x'}{c} \\ t_2' = t' + \dfrac{x'}{c} \ . \end{cases}$$

Ta sama relacja pomiędzy taktowaniem zegarów w O i O’, którą już omówiliśmy, prowadzi nas do równości $t_1' = \alpha T_0$ oraz $\alpha t_2' = T$. Podstawiając do powyższych równań i zamieniając $T_0 = t - \dfrac{x}{c}$ i $T = t + \dfrac{x}{c}$, mamy

$$\begin{cases} \alpha\left(t - \dfrac{x}{c}\right) = t' - \dfrac{x'}{c} \\ \dfrac{1}{\alpha}\left(t + \dfrac{x}{c}\right) = t' + \dfrac{x'}{c} \end{cases} ,$$

skąd

$$\begin{cases} \alpha(ct - x) = ct' - x' \\ \dfrac{1}{\alpha}(ct + x) = ct' + x' \end{cases} .$$

Dodając i odejmując stronami mamy

$$\begin{cases} 2ct' = \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) ct + \left(\dfrac{1}{\alpha} - \alpha\right) x \\ 2x' = \left(\dfrac{1}{\alpha} - \alpha\right) ct + \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) x \end{cases} .$$

Obowiązkowym ćwiczeniem Czytelnika będzie sprawdzenie, że $\frac{1}{\alpha} - \alpha \equiv -2\gamma\beta$, zaś $\alpha + \frac{1}{\alpha} \equiv 2\gamma$. Podstawiając te równości, otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \end{cases} .$$

Jest to, elegancka w swojej symetrii i dwuliniowości składników, poszukiwana przez nas transformacja pomiędzy układem O *(x, ct)* a O' *(x', ct'),* dzięki której wiemy, jakie współrzędne ma punkt czasoprzestrzeni w jednym układzie, jeśli znamy jego współrzędne w drugim.

Transformacja ta nosi nazwę **transformacji Lorentza**. Składniki *y* i *z*, prostopadłe do kierunku V, pozostają jednakowe w obu układach. Obserwatorzy O', którzy poruszają się z tą samą prędkością *V*, niezależnie od położenia, mierzą ten sam czas i w tym samym rytmie.

Kiedy *V* jest bardzo mała w stosunku do *c*, wówczas $x' \approx x - Vt$, $ct' \approx ct$, co stanowi transformację Galileusza, łamiącą symetrię formuły w czasie (żądającą jego braku dwuliniowości – liniowej zależności od *x* i od *ct*, tak jak obowiązuje to w formule Lorentza).

Przedziały czasu, mierzone w obu układach odniesienia O i O', będą się różnić wynikiem pomiaru ich długości (*dylatacja czasu*). Długości odcinków w O nie będą równe długościom mierzonym w O' (*skrócenie długości*; ponieważ pomiar długości to **jednoczesne** przyłożenie linijki do jego początku i końca, a równoczesności obu z pary dwóch różnych zdarzeń pomiędzy układami O i O' zwyczajnie nie da się zaaranżować). Dla dokonywania jakichkolwiek porównań i przekształceń, potrzebujemy jednak jakiejś stałej, jakiejś miary, która będzie jednakowa w obu układach – mówiąc matematycznie, potrzeba niezmiennika transformacji Lorentza.

Taką wielkością jest $s^2 := (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (nb. proszę przy okazji zwrócić uwagę na *sygnaturę czasoprzestrzenną* tej formuły: [+, -. -, -] – pierwszy składnik iloczynu skalarnego s·s = s^2 ma znak plus, pozostałe minus). Mamy bowiem

$$s'^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2 (ct - \beta x)^2 - \gamma^2 (x - \beta ct)^2 - y^2 - z^2 =$$
$$= \gamma^2 [(ct)^2 (1 - \beta^2) + x^2 (\beta^2 - 1) - x ct (2\beta - 2\beta)] - y^2 - z^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 .$$

Przechodząc do różnych układów odniesienia nie zmienia się wartość s^2, a zatem także i znak s^2. Zdarzenia o $s^2 > 0$ nazywane są *zdarzeniami czasopodobnymi*, zaś te o $s^2 < 0$ *przestrzennopodobnymi*. $s^2 = 0$ leży dokładnie na tworzącej stożka światła wychodzącego z O i jako takie, wyraża równanie rozchodzenia się fali świetlnej. W praktyce oznacza to, że w danym momencie czasu istnieją takie wydarzenia, które są konsekwencjami przeszłości lub przyczynami przyszłości niezależnie od przyjętego układu obserwacji tych wydarzeń (zd. czasopodobne), lub w danej chwili wcale nimi być nie mogą (zd. przestrzennopodobne). Nie istnieje taki dobór układów, w którym *związek przyczynowo-skutkowy* mógłby ulec odwróceniu, albo dwa niezwiązane ze sobą wydarzenia mogłyby się stać powiązane tym związkiem.

Autor: Marek Pietrachowicz.